



MINISTÈRE
DE LA MODERNISATION
DE L'ADMINISTRATION,
*en charge de l'énergie
et du numérique*

DIRECTION GÉNÉRALE
DES RESSOURCES HUMAINES
.....

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT DE TECHNICIENS DE CATEGORIE B RELEVANT DE LA FONCTION PUBLIQUE DE LA POLYNESIE FRANCAISE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Lundi 29 juillet 2019

(Durée : 3 heures – coefficient 3)

Le sujet comporte 10 pages dont une grille de réponses (page de garde incluse).

Aucun autre document n'est autorisé.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Important :

- Tous documents personnels ou appareils électroniques non autorisés sont interdits.
- Il vous est rappelé que votre identité ne doit figurer que dans la partie supérieure de la copie d'examen. Toute mention d'identité, de signature, d'initiale ou de paraphe sur toute autre partie de la copie entraînera l'annulation de votre épreuve.
- Seul l'usage d'un stylo noir ou bleu est autorisé (bille, plume ou feutre). L'utilisation d'une autre couleur pour écrire ou souligner est considérée comme un signe distinctif, de même que l'utilisation d'un surligneur.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas prises en compte.
- Tous les candidats doivent remettre une copie, même blanche. Dans cette hypothèse, ils signent leur copie en indiquant "copie blanche".

Cette épreuve comporte 25 QUESTIONS

CONSIGNES

- Tout dispositif électronique est **INTERDIT** (en particulier la calculatrice).
- Les réponses doivent être renseignées sur la feuille « **GRILLE DE REPONSES** » en cochant la ou les cases correspondantes à votre réponse pour la question considérée.
- Chaque question comporte au plus **2 REPONSES EXACTES**.
- Chaque ligne de la grille de réponse comporte 5 cases A, B, C, D, E. Pour chaque question du sujet, vous aurez 3 choix :
 - Si vous jugez que la question comporte 1 bonne réponse : vous devez cocher une seule case A, B, C ou D.
 - Si vous jugez que la question comporte 2 bonnes réponses : vous devez cocher 2 cases parmi les cases A, B, C ou D.
 - Si vous ne jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne : vous devez cocher la case E.
- Utilisez votre sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses sur la grille de réponse qu'après vous être soigneusement relu. En cas de doute sur la réponse du candidat, la question sera notée 0.

BAREME

Pour chaque question, le barème suivant sera appliqué :

- 1 point si aucune erreur est commise
- 0,5 point pour 1 erreur
- 0 point pour 2 erreurs ou si aucune case n'est cochée par le candidat
- -0,5 point pour 3 erreurs et plus

Le terme "erreur" s'entend de la façon suivante : une bonne réponse non cochée ou une mauvaise réponse cochée par le candidat.

Exercice I

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - 2\cos\theta \times z + 1 = 0$.

Question 1 - On peut affirmer que :

- A. Les solutions de (E) sont complexes conjuguées.
- B. Les solutions de (E) sont réelles conjuguées.
- C. Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -\sin^2 \theta$.
- D. Les solutions de (E) ne sont jamais des nombres réels.

On pose $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Question 2 - Les solutions de (E) sont alors :

- A. $z_1 = \frac{1}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- B. $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$
- C. $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$
- D. $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Soit z_1 la solution de (E) pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ avec une partie imaginaire positive.

On pose $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$.

Question 3 - On calcule $Z = \frac{z_1}{z_3}$:

- A. $Z = e^{i\frac{\pi}{12}}$
- B. $Z = e^{-i\frac{5\pi}{12}}$
- C. $Z = e^{i\frac{5\pi}{12}}$
- D. $Z = e^{i\frac{13}{12}\pi}$

Question 4 - On en déduit :

A. $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

B. $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

C. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

D. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

Question 5 - On en déduit également :

A. $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

B. $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

C. $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

D. $\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

On pose $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et z_1 et z_2 solutions de (E).

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point A d'affixe $z = -1$, le point M_1 d'affixe z_1 et le point M_2 d'affixe z_2 .

Question 6 - On recherche l'aire $A(\theta)$ du triangle AM_1M_2 :

A. $A(\theta) = \sin(\theta) \cos(\theta)$

B. $A(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \times (1 + \cos(\theta))$

C. $A(\theta) = \sin(\theta)(1 - \cos(\theta))$

D. $A(\theta) = \cos(\theta) \sin(2\theta)$

Question 7 - On recherche la valeur θ_m de θ pour laquelle l'aire $A(\theta)$ est maximum :

A. $\theta_m = \pi/6$

B. $\theta_m = \pi/3$

C. $\theta_m = \pi/2$

D. $\theta_m = \pi$

Exercice II

La durée de vie d'une ampoule LED est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,1$.

Question 8 - La probabilité P_1 que l'ampoule LED fonctionne toujours après 3 ans est :

- A. $P_1 = e^{0,3}$
- B. $P_1 = e^{-0,3}$
- C. $P_1 = 1 + e^{0,3}$
- D. $P_1 = 1 - e^{-0,3}$

Question 9 - La durée de vie moyenne d'une ampoule LED est de :

- A. 0,1 an
- B. 1 an
- C. 8 ans
- D. 10 ans

Une chaîne de production produit des ampoules LED.

Le temps de fabrication en minutes d'une ampoule LED est une variable aléatoire X qui suit une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[2 ; 5]$.

Question 10 - La fonction f de densité de cette loi de probabilité est définie sur $[2 ; 5]$ par :

- A. $f(x) = \frac{1}{3}$
- B. $f(x) = x - 2$
- C. $f(x) = \frac{x}{3}$
- D. $f(x) = 5x - 2$

Question 11 - Le temps de fabrication moyen d'une ampoule LED sur cette chaîne de production est :

- A. 2 minutes
- B. 3 minutes
- C. 5 minutes
- D. 7 minutes

Question 12 - La variance V de la variable aléatoire X est égale à :

- A. $V(X) = \int_2^5 \frac{(x-3,5)^2}{3} dx$
- B. $V(X) = \int_2^5 \frac{(x-5)x^2}{3} dx$
- C. $V(X) = 0,75$
- D. $V(X) = 1,5$

L'objectif de la chaîne de production est de produire seulement 5% d'ampoules LED en défaut.

Lors d'un contrôle, on relève 7 LEDs en défaut sur un lot de 100 LEDs prélevées au hasard.

Question 13 - On étudie la probabilité P_2 de cet évènement :

- A. $P_2 = 7\%$
- B. Pour calculer P_2 , on utilise une loi binomiale $\mathcal{B}(7 ; 0,05)$.
- C. Pour calculer P_2 , on utilise une loi binomiale $\mathcal{B}(100 ; 0,05)$.
- D. P_2 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 5$.

On donne $\sqrt{\frac{0,05 \times 0,95}{100}} \approx 0,02$.

Question 14 - On s'interroge sur la conformité de la chaîne de production :

- A. La chaîne de production est non conforme car le taux de défaut constaté est de 7%.
- B. La chaîne de production est conforme car le taux de défaut constaté est dans l'intervalle $\left[0,05 - \sqrt{\frac{0,05 \times 0,95}{100}} ; 0,05 + \sqrt{\frac{0,05 \times 0,95}{100}}\right]$.
- C. Ce contrôle ne permet pas de considérer que la chaîne est non conforme car la fréquence constatée est dans l'intervalle de fluctuation à 95%.
- D. Il y a plus de 95% de chance que la chaîne soit non conforme.

On admet que le taux de défaut sur la chaîne de production est de 5%. Une ampoule LED en défaut ne fonctionne jamais.

Question 15 - Le temps de fonctionnement moyen des ampoules LEDs produites sur la chaîne de production est de :

- A. 9,5 ans
- B. 5,5 ans
- C. 10 ans
- D. 20 ans

La chaîne de production produit à un rythme de 100 LEDs par heure. Son taux de défaut est de 5%.

Chaque fois qu'on augmente ce rythme de 10 LEDs/heure, on constate que le taux de défaut augmente de +1%. Par exemple, pour une production de 110 LEDs/heure, on obtient un taux de défaut de $5\%+1\%=6\%$.

On pose n le nombre de fois où on augmente le rythme de production de 10 LEDs/heure ($n \in \mathbb{N}$).

Question 16 - Le nombre $N(n)$ de LEDs conformes (i.e. non en défaut) produites chaque heure est donné par :

- A. $N(n) = (100 + 10n) \times 0,95n$
- B. $N(n) = (100 - 10n) \times (0,95 - n)$
- C. $N(n) = 100 \times \frac{n}{10} \times \left(0,95 - \frac{n}{100}\right)$
- D. $N(n) = (100 + 10n) \times \left(0,95 - \frac{n}{100}\right)$

Question 17 - On en déduit le rythme de production qui permet de maximiser le nombre de LEDs conformes produites chaque heure :

- A. 100 LEDs/heure
- B. 225 LEDs/heure
- C. 350 LEDs/heure
- D. 525 LEDs/heure

Exercice III

On considère le polynôme P défini sur \mathbb{R} par $P(x) = x^2 + x - 6$.

Question 18 : Sélectionner l'(les) affirmation(s) correcte(s) parmi les suivantes :

- A. Le discriminant de P est négatif.
- B. Le discriminant de P est un entier naturel.
- C. Les racines de P sont des imaginaires purs.
- D. Les racines de P sont des nombres réels.

Soit I l'intervalle de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x^2+x-6}\right)$.

Question 19 : Sélectionner l'(les) affirmation(s) correcte(s) parmi les suivantes :

- A. $] -\infty ; 1[\subset I$
- B. $] -\infty ; -3[\subset I$
- C. $] 1 ; 2[\subset I$
- D. $] -3 ; 2[\subset I$

Question 20 - On étudie les limites de la fonction f :

- A. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$
- B. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$
- C. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$
- D. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$

Question 21 - On étudie les asymptotes de la courbe de f dans un repère orthonormé :

- A. $y = -3$ est une asymptote horizontale.
- B. $y = 1$ est une asymptote verticale.
- C. $x = 2$ est une asymptote verticale.
- D. La courbe de f n'admet pas d'asymptote.

Question 22 - On recherche les valeurs x_1 et x_2 pour lesquels $f(x_1) = f(x_2) = 0$:

- A. $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$
- B. $x_1 = x_2 = 1$
- C. $x_1 = 1 + 2\sqrt{3}$ et $x_2 = 1 - 2\sqrt{3}$
- D. $x_1 = -1 - 3\sqrt{2}$ et $x_2 = -1 + 3\sqrt{2}$

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \{-3; 2\}$ par $h(x) = \frac{1-x}{x^2+x-6}$.

Question 23 - On recherche la dérivée h' de la fonction h :

- A. $h'(x) = -\frac{1}{(x^2+x+6)^2}$
- B. $h'(x) = \frac{x^2-2x+5}{(x^2+x-6)^2}$
- C. $h'(x) = \frac{-2x^2+x+1}{(x^2+x-6)^2}$
- D. $h'(x) = \frac{-3x^2-5}{(x^2+x-6)^2}$

Question 24 - On en déduit la dérivée f' de la fonction f :

- A. $f'(x) = \frac{x^2-2x+5}{(x^2+x-6)(1-x)}$
- B. $f'(x) = \frac{-3x^2-5}{(x^2+x-6)(1-x)}$
- C. $f'(x) = \frac{-2x^2+x+1}{(x^2+x-6)(1-x)}$
- D. $f'(x) = \frac{(-2x^2+x+1)(1-x)}{(x^2+x-6)^2}$

Question 25 - On en déduit que :

- A. f est monotone sur l'intervalle $]1; 2[$
- B. f est strictement décroissante sur l'intervalle $]1; 2[$
- C. f admet un minimum sur l'intervalle $]1; 2[$
- D. f est strictement croissante sur l'intervalle $]1; 2[$

GRILLE DE REPONSES A REMETTRE A LA FIN DE L'EPREUVE

Le candidat apportera le plus grand soin au remplissage de la feuille de réponses en évitant correcteur et rature. En cas de doute sur la réponse du candidat, la note zéro sera attribuée à la question.

Question 01	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Question 20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
Question 02	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Question 21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
Question 03	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Question 22	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
Question 04	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Question 23	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
Question 05	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Question 24	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
Question 06	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Question 25	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
Question 07	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						
Question 08	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						
Question 09	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						
Question 10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						
Question 11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						
Question 12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						
Question 13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						
Question 14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						
Question 15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						
Question 16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						
Question 17	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						
Question 18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						
Question 19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
	A	B	C	D	E						