POLYNESIE FRANÇAISE

**MINISTERE
DE L'EDUCATION,
DE LA MODERNISATION
DE L'ADMINISTRATION,**
en charge du numérique

DIRECTION GENERALE
DES RESSOURCES HUMAINES

CONCOURS **INTERNE** POUR LE RECRUTEMENT DES **INGENIEURS SUBDIVISIONNAIRES DE CATEGORIE** A RELEVANT DE LA FONCTION PUBLIQUE DE LA POLYNESIE FRANÇAISE

PREMIERE EPREUVE D'ADMISSIBILITE :

Mathématiques appliquées

SUJET PRINCIPAL

Mardi 11 avril 2023

(Durée : 3 heures – coefficient 3)

Le sujet comporte 15 pages (page de garde incluse).

Aucun autre document n'est autorisé.

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, non autorisée.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire, de tout autre matériel électronique et de téléphone cellulaire est rigoureusement interdit.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

CONSIGNES

- Cette partie de l'épreuve comporte **50 QUESTIONS** à choix multiples (QCM).
- La durée de l'épreuve est de **3 HEURES**
- Tout dispositif électronique est **INTERDIT** (en particulier la calculatrice).
- Chaque question de l'énoncé comporte **1 ou 2 REPONSES EXACTES** parmi 4 propositions.
- Les réponses doivent être renseignées sur la feuille « **GRILLE DE REPONSES** » en cochant la ou les case(s) correspondant à votre réponse pour la question considérée.
- Le **BAREME DU QCM** est le suivant :
    - Aucune erreur = 1 point
    - Une erreur (réponse erronée cochée ou une réponse exacte non cochée) = 0,5 points.
    - Plus d'une erreur = 0 point
    - Aucune réponse cochée = 0 point
    - En cas de doute sur la réponse du candidat à une question, la question sera notée 0 point
- La grille de réponse doit être remplie soigneusement conformément aux consignes données et ne doit comporter **AUCUN ELEMENT D'IDENTIFICATION**.

I - Nombres complexes

Exercice 1

On considère le nombre complexe $z = \sqrt{6} + 2i\sqrt{2}$

QCM1 On recherche l'ensemble des entiers naturels n tel que z^n est un nombre réel

A. $n \in \mathbb{N}$
B. $n \equiv 0(2)$
C. $n \equiv 0(6)$
D. $n \equiv 0(12)$

Exercice 2

On se place dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. Soit z un nombre complexe.

QCM2 Les solutions de l'équation $z^4 = 6$ sont :

A. Les sommets d'un triangle équilatéral
B. Les sommets d'un carré
C. Les sommets d'un pentagone régulier
D. Les sommets d'un hexagone régulier

Exercice 3

On considère les 2 nombres complexes suivants : $z_1 = \sqrt{2} \times e^{\frac{-i\pi}{6}}$ et $z_2 = -1 + i$.

QCM3 Le quotient $\frac{z_1}{z_2}$ est égal à :

A. $e^{-\frac{i7\pi}{12}}$

B. $e^{\frac{i11\pi}{12}}$

C. $e^{-\frac{i13\pi}{12}}$

D. $e^{\frac{i13\pi}{12}}$

QCM4 On en déduit :

A. $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)$

B. $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1)$

C. $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1)$

D. $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)$

Exercice 4

On se place dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé et on considère l'ensemble E des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - 1 + 2i| = 1$

QCM5 Cocher la ou les réponse(s) correcte(s)

A. E forme les sommets d'un polygone
B. E forme une demi-droite
C. E forme un cercle
D. E est une médiatrice de 2 points du plan complexe

QCM6 Dans le plan réel, l'équation cartésienne des points M tels que $|z - 1 + 2i| = 1$ est :

A. $2x - 4y + 4 = 0$
B. $x^2 + y^2 = 1$
C. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$
D. $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 2 = 0$

II- Trigonométrie

Exercice 5

Dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point M d'affixe $z = \sqrt{3}e^{i\phi}$ avec $\phi \in [0\,; \frac{\pi}{2}]$ et le point M' d'affixe $\bar{z}$.

QCM7 L'aire $A(\phi)$ du triangle OMM' est donnée par la relation :

A. $A(\phi) = \sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\phi)$

B. $A(\phi) = \sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\frac{\pi}{2} - \phi)$

C. $A(\phi) = \frac{3}{2}\sin(\phi)\cos(\phi)$

D. $A(\phi) = 3\cos(\phi)\sqrt{1 - \cos^2(\phi)}$

QCM8 La valeur de ϕ pour laquelle l'aire du triangle OMM' est maximale est obtenue pour :

A. $\phi = \frac{\pi}{2}$

B. $\phi = \frac{\pi}{3}$

C. $\phi = \frac{2\pi}{3}$

D. $\phi = \frac{\pi}{4}$

QCM9 On en déduit que l'aire maximale du triangle OMM' est :

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{2}$

III- Algèbre linéaire

Exercice 6

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3. On appelle $I\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On donne $A\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

QCM10 Cocher la ou les réponse(s) exacte(s)

A. A est une matrice inversible
B. A n'est pas une matrice inversible
C. A est une matrice diagonale
D. Si on note ${}^tA$ la matrice transposée de A, alors ${}^tA = A$

QCM11 On démontre que A^n est la matrice :

A. $2^{n-1}A$
B. 2^nA
C. $3^{n-1}A$
D. 4^nA

Exercice 7

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on recherche toutes les matrices diagonales $M\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$ telles que : $M^3 - 2M^2 - 5M + 6I = 0$

QCM12 On démontre que les coefficients diagonaux (a, b, c) sont solutions de l'équation :

A. $x^3 + 2x^2 - 5x + 6 = 0$
B. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
C. $2x^3 - x^2 + 5x + 6 = 0$
D. $x^3 - x^2 + 5x - 6 = 0$

QCM13 A l'aide d'une racine évidente dans l'équation des coefficients diagonaux de M, on obtient :

A. $a = 1$ et $(b, c) \in \{-2{,}3\}^2$ soit 4 solutions
B. $(a, b, c) \in \{-1; 2; 3\}$ soit 6 solutions
C. $(a, b, c) \in \{-2, 1, 3\}^3$ soit 27 solutions
D. $(a, b, c) \in \{1{,}2{,}3\}^3$ soit 27 solutions

IV- Fonctions de variables réelles

Exercice 8

On considère l'équation $e^x - 1 - 6e^{-x} = 0$

QCM14 cette équation admet :

A. Aucune solution
B. 1 solution
C. 2 solutions
D. 3 solutions

Exercice 9

Dans une centrifugeuse à plasma, la vitesse V (en mm/s) du liquide dépend du rayon ajustable r (en mm) du tube suivant l'expression $V(r) = \frac{31{,}4}{\pi}(3r^2 - r^3)$

QCM15 Cocher la ou les réponse(s) exacte(s) :

A. Le constructeur affirme que l'on peut régler le rayon de la centrifugeuse de 0mm à 3mm
B. Plus le rayon du tube croit, plus la vitesse augmente
C. La vitesse maximale sera atteinte pour un rayon de 2mm
D. La vitesse maximale du liquide est de 52,2 mm/s

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0; 14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

QCM16 Sur l'intervalle I :

A. $f(x)$ est positif
B. $f(x)$ est négatif
C. $f(x)$ est croissant
D. $f(x)$ est décroissant

On appelle Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'origine O.

A tout point M appartenant à Cf, on associe :

- le point P projeté orthogonale de M sur l'axe des abscisses
- le point Q projeté orthogonale de M sur l'axe des ordonnées.

On considère le rectangle formé des points $OPMQ$ dans le repère du plan.

QCM17 Cocher la ou les réponse(s) exacte(s)

A. L'aire du rectangle $OPMQ$ est constante
B. L'aire du rectangle $OPMQ$ atteint un maximum en $x = 2e$
C. L'aire du rectangle $OPMQ$ atteint un maximum en $x = e$
D. L'aire maximale du rectangle $OPMQ$ est $2e$

Exercice 11

La fraction de l'intensité de lumière transmise à travers une solution d'un colloïde par rapport à l'intensité de lumière incidente est décrite par une fonction $A(x) = -\log(1 - x)$

QCM18 On cherche l'approximation à l'ordre 1 de la fonction $A(h)$ au voisinage de $h = 0$

A. $A(h) \sim h$
B. $A(h) \sim h \times \ln(10)$
C. $A(h) \sim \frac{h}{\ln(10)}$
D. $A(h) \sim -\frac{h}{\ln(10)}$

Exercice 12

Soit a un réel strictement positif. On note P_a la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_a(x) = x^3 + ax - 1.$$

QCM19 Cocher la ou les réponse(s) exacte(s) :

A. $P_a(x)$ n'admet aucune solution réelle
B. $P_a(x)$ admet une seule solution réelle
C. $P_a(x)$ admet 2 solutions réelles
D. $P_a(x)$ admet 3 solutions réelles

QCM20 On considère la fonction $u(a)$ qui à tout a réel positif associe la racine de $P_a(x)$. On montre que :

A. $u(a) > 0$
B. $u(a) < 0$
C. Pour tout a, b réels positifs, $P_a\big(u(b)\big) = (a - b)u(b)$
D. Pour tout a, b réels positifs, $P_a\big(u(b)\big) = (a + b)u(b)$

Aide : comparer $P_a(0)$ à $P_a(u(a))$

QCM21 On en déduit que :

A. La fonction $u: a \to u(a)$ est strictement croissante
B. La fonction $u: a \to u(a)$ est strictement décroissante
C. $u(a)$ converge vers une limite finie quand a tend vers $\infty +$
D. $\lim_{a \to \infty +} u(a) = +\infty$

Exercice 13

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir un développement limité d'ordre 3 de f pour x proche de 0 : $f(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

QCM22 Il s'agit de la fonction :

A. $f(x) = xe^{-x}$
B. $f(x) = (x + 2)e^{x}$
C. $f(x) = (x + 2)e^{-x}$
D. $f(x) = (x + 2)\ln(x + 1)$

QCM23 On peut dire que la tangente T à la courbe représentative C de f en $x = 0$ a pour équation :

A. $y = 2$
B. $y = x - 2$
C. $y = x + 2$
D. $y = 2 - x$

QCM24 Au voisinage du point $x = 0$,

A. T est en dessus de C pour $x < 0$ puis en dessous de C pour $x > 0$
B. T et C sont confondues pour tout $x > 0$
C. T est au dessus de C
D. T est en dessous de C

V - Fonctions de plusieurs variables

Exercice 14

On détermine la focale f d'une lentille en fonction de la distance D entre l'objet et l'écran et la distance d entre les deux positions de la lentille où l'on obtient une image nette, par la méthode de Bessel: $f(d, D) = \frac{(D^2-d^2)}{4D}$

QCM25 Cochez-le (ou les) item(s) exact(s).

A. $\frac{df}{dD} = \frac{D^2+d^2}{4D^2}$
B. $df = \left(\frac{1}{4} + \frac{d^2}{4D^2}\right) dD - \frac{d}{2D} dd$
C. $df = \left(\frac{1}{4} + \frac{d^2}{4D^2}\right) dD + \frac{d}{2D} dd$
D. $df = \left(\frac{1}{4} - \frac{d^2}{4D^2}\right) dD + \frac{d}{2D} dd$

QCM26 On suppose que $D = d$. On effectue une variation de D de +0,5 très petite devant la valeur de D.

A. La variation df sera de +0,5
B. La variation df sera de -0,5
C. La variation df sera de +0,25
D. La variation df sera de -0,25

Exercice 15

On recherche les points critiques (extremums) de la fonction $f(x,y) = xy(x + 3y - 2)$

QCM27 Cocher la ou les réponse(s) exacte(s)

A. $f(x,y)$ n'admet aucun extremum
B. $f(x,y)$ admet 2 extremums en $(x,y) \in \{(0,0) ; (-1 ; 1)\}$
C. $f(x,y)$ admet 3 extremums en $(x,y) \in \left\{(0,0) ; (2 ; 0) ; \left(-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)\right\}$
D. $f(x,y)$ admet 4 extremums en $(x,y) \in \left\{(0,0) ; (2 ; 0); \left(0; \frac{2}{3}\right); \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{9}\right)\right\}$

Exercice 16

On considère la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ définie sur le domaine suivant :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

QCM28 On recherche la valeur de $I = \iint_D f(x,y)dxdy$

A. $I = \frac{1}{6}$
B. $I = \frac{1}{2}$
C. $I = \frac{2}{3}$
D. $I = \frac{5}{3}$

*** *VI - Equations différentielles* ***

Exercice 17

On considère une population de taille $P(t)$ avec t une durée exprimée en années ($t \in \mathbb{R}^+$). Cette population augmente de 10% tous les ans mais perd également 50 individus tous les ans.

QCM29 $P(t)$ est solution de l'équation différentielle ($E1$) suivante :

A. $P'(t) = -0{,}1P(t) + 50$
B. $P'(t) = -0{,}1P(t) - 50$
C. $P'(t) = 0{,}1P(t) + 50$
D. $P'(t) = 0{,}1P(t) - 50$

QCM30 Les solutions de cette équation différentielle $(E1)$ sont :

A. $P(t) = Ke^{0,1t} - 500$ avec $K \in \mathbb{R}$

B. $P(t) = Ke^{-0,1t} - 500$ avec $K \in \mathbb{R}$

C. $P(t) = Ke^{-0,1t} + 500$ avec $K \in \mathbb{R}$

D. $P(t) = Ke^{0,1t} + 500$ avec $K \in \mathbb{R}$

QCM31 La population à l'instant t=0 s'élève à 250 individus. On peut affirmer que :

A. La population va tendre vers l'infini quand t tend vers l'infini.

B. La population finit par s'éteindre au bout de $t = 10 \times \ln(2)$ années.

C. La population finit par s'éteindre au bout de $t = \frac{\ln(10)}{2}$ années.

D. La population va tendre vers 500 quand t tend vers l'infini.

Exercice 18

En 1840, Pierre-François Verhulst remet en cause le modèle malthusien de croissance exponentielle d'une population et démontre que cette croissance s'adapte à la capacité biotique du milieu d'accueil.

Il démontre ainsi que la taille $P(t)$ d'une population en fonction du temps t suit l'équation différentielle (E) : $\frac{dP}{dt} = aP(P - b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

On appelle $Nmax$ la capacité biotique du milieu d'accueil et N0 la population initiale au temps $t = 0$

QCM32 La fonction $P(t)$ solution de (E) est :

A. $P(t) = \frac{Nmax \times e^{-at}}{1 + \frac{Nmax - N0}{N0} t}$

B. $P(t) = \frac{Nmax \times e^{at}}{1 + N0}$

C. $P(t) = \frac{Nmax}{1 + \frac{Nmax - N0}{N0} e^{-at}}$

D. $P(t) = \frac{Nmax}{1 + \frac{Nmax - N0}{N0} e^{at}}$

QCM33 Soit une population de bactéries de taille initiale $N0 = 2mg$ se développant dans un milieu de capacité biotique $Nmax = 200mg$ avec un taux de croissance intrinsèque $a = 0{,}4mg/h$.

Quelle est la durée t nécessaire pour que la population atteigne $45mg$? On donne $\ln(30) \sim 3{,}4$

A. $t \sim 5h12mn$
B. $t \sim 8h24mn$
C. $t \sim 11h57mn$
D. $t \sim 14h09mn$

Exercice 19

On considère l'équation différentielle du 2nd ordre $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$

QCM34 Une solution de cette équation différentielle est :

A. $y(x) = K_1e^{x} + K_2e^{-2x}$ avec $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$
B. $y(x) = K_1e^{-x} + K_2e^{2x}$ avec $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$
C. $y(x) = (K_1x + K_2)e^{-2x}$ avec $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$
D. $y(x) = (K_1\cos(x) + K_2\sin(x))e^{2x}$ avec $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$

QCM35 On donne $y(0) = y'(0) = 1$

A. $K_1 = 3$ et $K_2 = 1$
B. $K_1 = 0$ et $K_2 = 1$
C. $K_1 = -1$ et $K_2 = 0$
D. $K_1 = -2$ et $K_2 = 1$

VII - Géométrie du plan et de l'espace

Exercice 20

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $A(0\ ;-2\ ;3)$, $B(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $C(-1\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

QCM36 Sélectionner la proposition correcte parmi les suivantes :

A. Les points A, B et C sont alignés.

B. Les points A, B et C définissent un triangle rectangle en A.

C. Le vecteur $\vec{u}$ (4 ; 2 ; 7) est normal au plan (ABC).

D. Le vecteur $\vec{u}$ (– 4 ; 6 ; 5) est normal au plan (ABC).

QCM37 Une équation cartésienne du plan (ABC) est :

A. $-4x - 6y + 2z = 0$

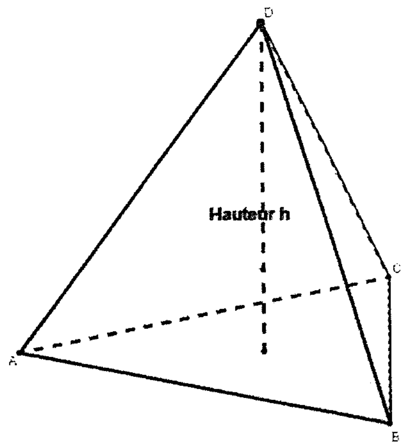
B. $-4x + 6y + 5z = 3$

C. $-4x + 6y + 5z = 5$

D. $-2x + 6y + 2z = 5$

Exercice 21

On appelle tétraèdre régulier ABCD une pyramide donc chaque face est constituée d'un triangle équilatéral. On note x la longueur d'un coté de ce triangle équilatéral



QCM38 La surface $S(x)$ d'une face du tétraèdre régulier est :

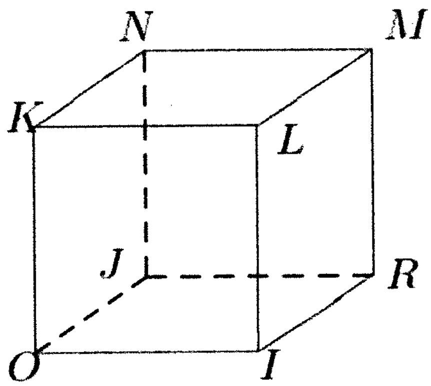
A. $S(x) = \sqrt{3}x^2$
B. $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$
C. $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$
D. $S(x) = \sqrt{3}x$

QCM39 Le volume $V(x)$ de la pyramide est :

A. $V(x) = \sqrt{2}x^3$
B. $V(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}x^3$
C. $V(x) = \frac{\sqrt{2}}{6}x^3$
D. $V(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}x^3$

Exercice 22

L'espace est rapporté à un repère orthogonal de sens direct $(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\,;\,\overrightarrow{OK})$.



On considère le cube ci-contre de sommets O, I, R, J, N, K, L, M.

On note A le milieu de $[IL]$ et B le point défini par $\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$. On note $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ et on note (P) le plan passant par les points O, A, B.

QCM40 On recherche les coordonnées de $\vec{u}$

A. $\vec{u}\left(\frac{1}{3};\ -1; \frac{1}{3}\right)$
B. $\vec{u}\left(-\frac{1}{3};\ -1; \frac{2}{3}\right)$
C. $\vec{u}(-1; -3; 2)$
D. $\vec{u}\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 1\right)$

QCM41 On recherche l'aire A du triangle OAB

A. $A = \frac{\sqrt{14}}{6}$
B. $A = \frac{\sqrt{21}}{4}$
C. $A = \frac{\sqrt{17}}{9}$
D. $A = \frac{\sqrt{56}}{6}$

QCM42 On recherche le volume V du tétraèdre OABK

A. $V = \frac{1}{3}$
B. $V = \frac{\sqrt{17}}{2}$
C. $V = \frac{1}{9}$
D. $V = \frac{7}{22}$

QCM43 On en déduit la distance h du point K au plan (P)

A. $h = \frac{2}{\sqrt{7}}$
B. $h = \frac{2}{\sqrt{14}}$
C. $h = \frac{6}{\sqrt{14}}$
D. $h = \frac{2}{\sqrt{21}}$

VIII - Notions élémentaires de statistiques

Exercice 23

Dans une ferme de 100 poules, un fermier relève pour chaque poules le nombre d'œufs pondus chaque semaine. Il obtient la répartition suivante :

Nbre œufs	0	1	2	3	4	5	Total
Effectif	18	22	28	12	14	6	100

QCM44 Cocher la ou les réponse(s) exacte(s) :

A. Le caractère étudié est le nombre de poules dans la ferme
B. Le caractère étudié est quantitatif
C. En moyenne, les poules pondent 2,0 œufs par semaine dans cette exploitation
D. En moyenne les poules pondent 3,1 œufs par semaine dans cette exploitation

QCM45 Cocher la ou les réponse(s) exacte(s) :

A. Cette série statistique suit une répartition uniforme
B. La variance de cette série statistique est de 2,16
C. La variance de cette série statistique est de 3,4
D. La variance de cette série statistique est de -1,25

<u>Aide</u> : on pourra utiliser la formule de Huygens Koenig

Certains œufs pondus par les poules ont des taches brunes que le fermier ne vend pas car ils ne sont pas appréciés des consommateurs.

En première approximation, le fermier estime qu'il y'a 20% de chance qu'une poule ponde un œuf avec des taches brunes.

QCM46 Quelle est la probabilité p d'avoir au moins un œuf avec des taches dans un lot de 10 œufs ramassé par le fermier ?

A. $p = 1 - 0{,}8^{10}$
B. $p = 0{,}8^{10}$
C. $p = 10 \times 0{,}2^{9}$
D. $p = 10 \times 0{,}2^{10}$

Après avoir étudié la question, le fermier se rend compte que les poules de race A de son exploitation pondent plus fréquemment des œufs avec des taches (25% d'œufs tachés) que les autres poules de l'exploitation (10%)

QCM47 La proportion de poules de la race A dans l'exploitation est :

A. $2/3$
B. $1/2$
C. $1/3$
D. $1/5$

Dans cette exploitation, l'espérance de vie d'une poule pondeuse est une variable aléatoire X définie sur l'intervalle $[0; a]$ ($a \in \mathbb{R}^+$) qui suit la loi de densité suivante : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

QCM48 Quelle est la durée de vie maximale d'une poule pondeuse dans cette exploitation ?

A. $2e$~5,4 ans
B. $\sqrt{e^2 - 1}$~2,5 ans
C. $\sqrt{e^2 + 1}$~2,9 ans
D. $10(e - 1)^2$~1,4 ans

QCM49 Quelle est l'espérance de vie d'une poule dans cette exploitation ?

On donne $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

A. $\sqrt{e^2 - 1} - \arctan\left(\sqrt{e^2 - 1}\right)$ ~1,3 ans
B. $e - \arctan(e)$ ~1,5 ans
C. $\sqrt{e + \arctan(e + 1)}$ $\sim 2\ ans$
D. $e + \arctan(e)$ ~3,9 ans

<u>Aide</u> : exprimer $\frac{x^2}{1+x^2}$ *sous la forme* $\alpha + \frac{\beta}{1+x^2}$

QCM50 On suppose que toutes les poules de l'exploitation sont issues de la même couvée. Au bout d'un an, quelle sera la population de poules dans l'exploitation ?

A. $p = ln2 \times 100 \sim 69$ poules
B. $p = \frac{ln2}{2} \times 100 \sim 35$ poules
C. $p = \left(1 - \frac{ln2}{2}\right) \times 100 \sim 65$ poules
D. $p = \left(1 + \frac{ln2}{2}\right) \times 100 \sim 134$ poules